



Hochschule für Angewandte Wissenschaften Hamburg
Hamburg University of Applied Sciences

Seminararbeit
Active Noise Cancellation
Jörn Matthies

Active Noise Cancellation

Jörn Matthies

Betreuende Professoren: Prof. Dr. rer. nat. Fohl
Prof. Dr.-Ing. Schwarz

Informatik MA
14. Februar 2007

Jörn Matthies

Thema der Seminararbeit

Active Noise Cancellation

Stichworte

Active Noise Cancellation (ANC), Adaptive Feedback System, Adaptive Feedforward System, Adaptive Filter, FIR-Filter, LMS-Adaptionsalgorithmus, Matlab, Simulink

Kurzzusammenfassung

Diese Seminararbeit behandelt das Thema *Active Noise Cancellation* oder *Aktive Geräuschauslöschung*. Bei der aktiven Geräuschauslöschung wird ein Störgeräusch aufgenommen und analysiert. Es wird ein Gegengeräusch erzeugt, das dem um 180° verschobenen Störgeräusch entspricht. Durch die Überlagerung löschen sich beide Geräusche gegenseitig aus. Es gibt zwei grundsätzlich unterschiedliche Arten von ANC-Systemen. Das *Adaptive Feedback System* besteht aus einer Störsignalquelle, einem Fehlermikrofon, einer Kompensationseinheit und einer Gegensignalquelle. Ein solches System wird mit Hilfe von Simulink Version 6.3 modelliert, wobei der Kern des Systems, die Kompensationseinheit, aus einer rückgekoppelten FIFO-Struktur besteht. In diesem System existiert eine direkte Abhängigkeit zwischen Abtastfrequenz und Größe des FIFOs, die dazu führt, dass lediglich ein Störsignal, das aus einem Grundton plus drei Obertönen besteht, ausgelöscht werden kann. Die Simulation wird zunächst mit einem konstanten Signal mit einer Grundfrequenz von 100 Hz plus den drei nächsten Obertönen durchgeführt. Nach einer Verzögerung von genau einer Periodendauer der Grundfrequenz, die durch das FIFO verursacht wird, erzeugt das System das um 180° phasenverschobene Störsignal. Durch die Überlagerung der beiden Signale, die als Addition modelliert wird, löschen diese sich gegenseitig aus. Eine zweite Simulation, in der dem Störsignal zusätzlich Rauschen überlagert wird, zeigt, dass das System nicht in der Lage ist, auf ein komplexeres Störsignal zu reagieren. Das Störsignal wird nur minimal reduziert. Das *Adaptive Feedforward System* verfügt zusätzlich zu den Komponenten des *Adaptive Feedback Systems* über ein Referenzmikrofon. Dieses Mikrofon nimmt das Störsignal an seiner Quelle auf und stellt es dem System als Referenzsignal zur Verfügung. Die Kompensationseinheit in diesem System besteht aus einem digitalen Filter, das die Aufgabe hat, die Übertragungsstrecke des Störsignals von der Quelle bis zu dem Punkt, an dem das Signal ausgelöscht werden soll, zu modellieren und einem Algorithmus der die Koeffizienten des Filters adaptiert. Dadurch kann das System zur Laufzeit auf Veränderungen der Eingangssignale oder der Übertragungsstrecke reagieren. Das Primärsignal, welches durch die Überlagerung eines erwünschten Nutzsignals mit dem Störsignal entsteht, soll durch das System vom Störsignal befreit und dadurch dem Nutzsignal angenähert werden. Das System wird mit einem FIR-Filter und einem LMS-Adaptionsalgorithmus modelliert. Als Nutzsignal dient eine Audio-Sprachdatei. Dieses Signal wird durch ein *Random Noise* (Rauschen) gestört. Mit einer einfachen Übertragungsstrecke, die als reine Verzögerung des Störsignals modelliert wird, kann durch dieses adaptive ANC-System eine fast exakte Näherung des Nutzsignals erreicht werden. In der Praxis finden solche ANC-Systeme bereits Einsatz in Kopfhörern, die zum Beispiel im Flugzeug getragen werden können, um das Rauschen in der Kabine zu unterdrücken. In der Automobil- und Flugzeugindustrie werden festinstallierte Systeme entwickelt, die die Fahr- oder Fluggeräusche im Innenraum auslöschen sollen. Außerdem forscht die NASA an einem mit einem ANC-System ausgerüsteten Flugzeugtriebwerk, um die Triebwerksgeräusche zu reduzieren.

Inhaltsverzeichnis

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Einleitung | 5 |
| 1.1 | Aktive Geräuschauslöschung | 5 |
| 1.2 | Zielsetzung | 5 |
| 2 | Grundprinzip „Active Noise Cancellation“ | 5 |
| 2.1 | Physikalisches Prinzip | 5 |
| 2.2 | ANC-Systeme | 6 |
| 2.2.1 | Adaptive Feedback System | 6 |
| 2.2.2 | Adaptive Feedforward System | 6 |
| 3 | ANC-System mit rückgekoppeltem FIFO | 7 |
| 3.1 | Vorgaben und Randbedingungen | 7 |
| 3.2 | Systemmodellierung einer rückgekoppelten FIFO-Struktur | 8 |
| 3.3 | Simulation mit Simulink Version 6.3 | 8 |
| 3.3.1 | Simulationsparameter | 8 |
| 3.3.2 | Simulationsergebnisse | 8 |
| 3.4 | Nachteile des ANC-Systems mit rückgekoppeltem FIFO | 9 |
| 4 | ANC-System mit adaptivem Filter | 9 |
| 4.1 | Adaptive Filterung | 9 |
| 4.1.1 | FIR-Filter | 10 |
| 4.1.2 | LMS-Adaptionsalgorithmus | 10 |
| 4.2 | Systemmodellierung des adaptiven ANC-Systems | 12 |
| 4.3 | Simulation mit Simulink Version 6.3 | 12 |
| 4.3.1 | Simulationsparameter | 12 |
| 4.3.2 | Simulationsergebnisse | 14 |
| 4.4 | Vorteile des Systems | 14 |
| 5 | Einsatzgebiete von ANC-Systemen | 14 |
| | Literatur | 16 |
| | Abbildungsverzeichnis | 17 |
| A | Das Prinzip der Faltung | 18 |
| B | Erwartungswert und Varianz | 20 |
| C | Kreuzkorrelation und Autokorrelation | 29 |
| | Index | 33 |

1 Einleitung

1.1 Aktive Geräuschauslöschung

Als aktive Geräuschauslöschung bezeichnet man die Auslöschung eines störenden Geräusches durch die Überlagerung mit einem künstlich erzeugten Gegengeräusch. Paul Leug patentierte diese Idee im Jahr 1933. Seit den 50er Jahren wird in diesem Bereich geforscht. Praktische Anwendungen konnten jedoch erst durch die Fortschritte in der digitalen Signalverarbeitung realisiert werden (Kestell und Hansen (1998)). Zunächst auf niederfrequente periodische Geräusche beschränkt, können heute auch komplexere Geräusche ausgelöscht werden. Die *Active Noise Cancellation* befindet sich jedoch nach wie vor in der Entwicklung. Mit zunehmender Leistungsfähigkeit der realisierenden Hardware werden auch die praktischen Einsatzbereiche vielfältiger (Kuo und Morgan (1999)).

1.2 Zielsetzung

Diese Seminardokumentation ist Bestandteil eines Projekt- und Masterarbeitszyklus, der die Entwicklung eines ANC-Systems zur Unterdrückung von Fahrzeuggeräuschen anstrebt. Studenten der Technischen Informatik entwickeln im Masterkurs „Verteilte Embedded Systeme“ ein fahrerloses, autonomes Transportsystem (FAUST) als Versuchsträger für Fahrzeug-Sicherheitsfunktionen. Automatische Notbremsungen, geführte Spurwechsel zur Kollisionsvermeidung sowie eine Parkbuchterkennung sind Entwicklungsziele. Zur Fahrzeug-Umgebungserkennung dienen Laserscanner und CCD-Kameras.

Das ANC-System soll in dieses Projekt eingebunden werden, um die Geräusche des Transportfahrzeuges auszulöschen. Im ersten Ansatz wird die Auslöschung über einen Kopfhörer realisiert. Die Algorithmen und Signalverarbeitungsfunktionen sollen mit einer FPGA-Audio-Codec Plattform implementiert werden. Ein weiterführender Ansatz ist das Auslöschen der Fahrzeuggeräusche im dreidimensionalen Raum mit Hilfe von Lautsprechern. Dieser Ansatz wird in dieser Arbeit jedoch nicht behandelt.

2 Grundprinzip „Active Noise Cancellation“

2.1 Physikalisches Prinzip

Eine Quelle erzeugt ein Geräusch indem sie durch Vibration den Druck auf die umgebende Luft verändert und diese dadurch in Schwingung versetzt. Bei einem Sinuston hat diese Schwingung die Form einer Sinuswelle. Um eine solche Schwingung auszulöschen, wird eine Schwingung erzeugt die der invertierten Störschwingung entspricht. Die erzeugte Schwingung wirkt der Störschwingung entgegen, wodurch sich beide Schwingungen gegenseitig aufheben (Abb. 1)(Kestell und Hansen (1998)).

Die Invertierung wird durch eine Phasenverschiebung der Störschwingung um 180° erreicht. Mathematisch gesehen ist dies die Multiplikation des Störsignals mit -1 . Diese beiden Signale werden addiert und das resultierende Signal ist 0 (Abb. 1).

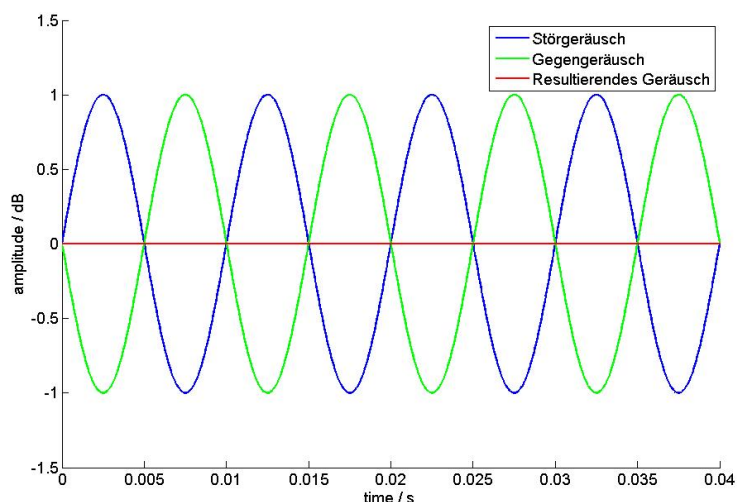


Abb. 1: Auslöschung einer Sinusschwingung

2.2 ANC-Systeme

2.2.1 Adaptive Feedback System

Es gibt zwei grundsätzlich unterschiedliche Arten von ANC-Systemen. Eines davon ist das *Adaptive Feedback System* (Abb. 2).

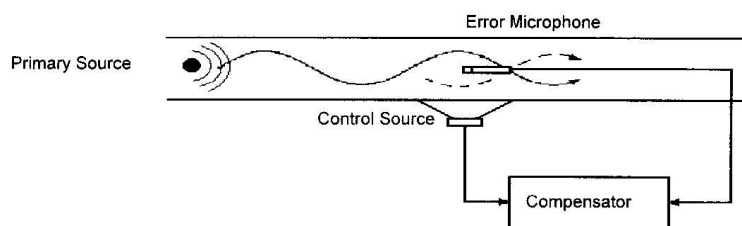


Abb. 2: Adaptive Feedback System

Das System besteht aus einer Störgeräuschquelle, einem Fehlermikrofon, einer Signalverarbeitungseinheit und einer Gegengeräuschquelle (Abb. 2). Das Fehlermikrofon nimmt das Signal auf, das aus der Überlagerung von Störgeräusch und Gegengeräusch resultiert. Dieses Signal soll minimiert werden. Dazu wird über die Gegengeräuschquelle ein Signal gesendet, das dem Fehlersignal angeglichen, und um 180° phasenverschoben wird. Das System versucht also das komplette Signal, das beim Fehlermikrofon ankommt, auszulöschen (Kestell und Hansen (1998)).

2.2.2 Adaptive Feedforward System

Die zweite Variante ist das *Adaptive Feedforward System*. Dieses System verfügt, zusätzlich zu den Komponenten eines Feedback Systems, über ein Referenzmikrofon (Abb. 3)(Kestell und Hansen (1998)).

Dieses Referenzmikrofon befindet sich direkt an der Störgeräuschquelle und stellt dem System das Störgeräusch an der Quelle als Referenzsignal zur Verfügung. Mit dem Filter in diesem System wird die Übertragungstrecke des Störgeräusches von der Quelle bis zum Fehlermikrofon modelliert.

Wenn das Störgeräusch mit einem Nutzgeräusch überlagert ist, welches nicht ausgelöscht werden soll, ist dieses System in der Lage nur das Störgeräusch zu entfernen, da das Störgeräusch an seinem Entstehungspunkt bekannt ist. Das Ziel ist auch bei diesem System das Fehlersi-

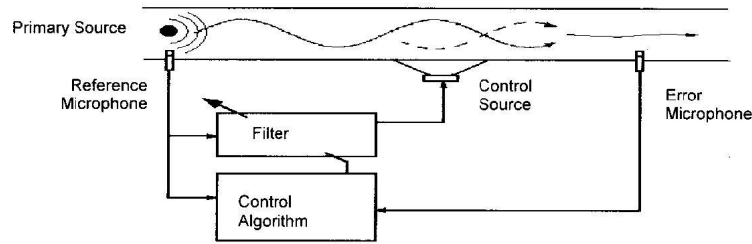


Abb. 3: Adaptive Feedforward System

gnal zu minimieren. Im Gegensatz zum Feedback System muss das Fehlersignal jedoch nicht vollständig ausgelöscht, sondern dem Nutzsignal angeglichen werden.

Die beiden Systeme, die in den folgenden Kapiteln vorgestellt werden, vertreten jeweils eine dieser beiden Systemarten.

3 ANC-System mit rückgekoppeltem FIFO

Das in diesem Kapitel erläuterte ANC-System stellt eine einfache Version eines *Adaptive Feed-back Systems* dar, anhand dessen die Grundfunktionsweise eines ANC-Systems verdeutlicht werden soll.

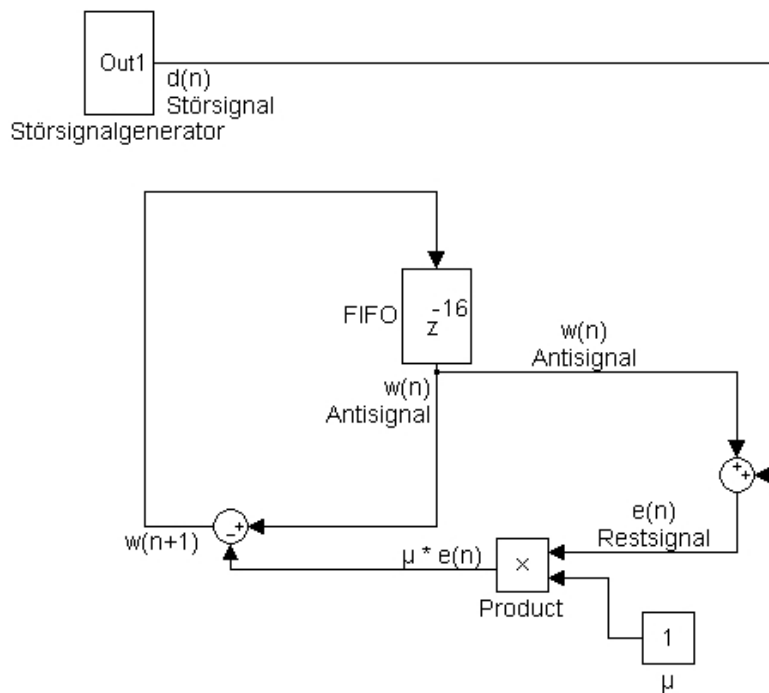


Abb. 4: Struktur des ANC-Systems mit rückgekoppeltem FIFO

3.1 Vorgaben und Randbedingungen

Zur Vereinfachung werden in diesem Ansatz nur die digitalen Signale betrachtet. Das in einem realen System notwendige Umwandeln der Signale von ihrer analogen Form in die digitale Form und auch das Umwandeln in die andere Richtung wird hier ausser Acht gelassen. Des weiteren wird eine mögliche akustische Verzögerung der Signale vernachlässigt. Außerdem wird zur Erzeugung des Gegensignals kein digitales Filter, sondern ein FIFO-Speicher verwendet. Damit das in Bild 4 beschriebene System korrekt funktioniert, muss das Störsignal auf ein Signal bestehend aus einer Grundfrequenz plus drei Obertönen beschränkt sein. Außerdem muss

die Samplefrequenz, mit der das Störsignal abgetastet wird, dem vierfachen der Frequenz des dritten Obertons entsprechen (Hashemian u. a. (1993)).

3.2 Systemmodellierung einer rückgekoppelten FIFO-Struktur

Die ANC-Systemsignale in Abb. 4, das Störsignal $d(n)$, das Gegensignal $w(n)$ und das Restsignal $e(n)$ repräsentieren die jeweiligen abgetasteten Zeitfunktionen. Das Restsignal $e(n)$ entsteht, wie in Kapitel 2.1 beschrieben durch die Überlagerung des Störsignals $d(n)$ mit dem Gegensignal $w(n)$. Diese Überlagerung wird durch die Addition der beiden Signale modelliert.

$$e(n) = d(n) + w(n) \quad (1)$$

Wobei n die Nummer des Samples angibt. Das Restsignal wird wiederum verwendet, um das Gegensignal $w(n)$ neu zu berechnen.

$$w(n+1) = w(n) - \mu * e(n) \quad (2)$$

Wobei μ ein Schrittweitenfaktor ist, über den die Stabilität des Systems eingestellt werden kann (Hashemian u. a. (1993)). Dies ist jedoch nur notwendig, wenn sich das Störsignal mit der Zeit verändert und das System auf diese Änderung reagieren muss. Durch einen niedrigen Schrittweitenfaktor kann in diesem Fall ein Überschwingen des Systems verhindert werden. Wenn das Störsignal konstant ist, kann der Schrittweitenfaktor auf 1 gesetzt werden, um ein schnelles Einstellen des Systems zu ermöglichen.

Die Länge des im FIFO-Speicher des Systems (Abb. 4) gespeicherten Gegensignals entspricht genau der Länge einer Periode des Grundtons. Der FIFO erzeugt dadurch die für eine Auslöschung erforderliche Phasenlage des Gegensignals. Im Speicher sind dann im Idealfall eine invertierte Periode des Grundtons, zwei invertierte Perioden des ersten Obertons, drei invertierte Perioden des zweiten Obertons und vier invertierte Perioden des dritten Obertons. In diesem Fall wird das Störsignal komplett ausgelöscht. Um die richtige Abtastfrequenz zu erhalten, wird ein Signal mit einer Frequenz, die dem Sechzehnfachen der Grundfrequenz entspricht, erzeugt. Auf jedem Nulldurchgang einer steigenden Flanke dieses Signals wird das Störsignal abgetastet.

3.3 Simulation mit Simulink Version 6.3

3.3.1 Simulationsparameter

Die Simulation des Systems erfolgt mit Hilfe von Simulink Version 6.3 (vgl. Abb. 4). Das Störsignal besteht aus vier Sinustönen. Dem Grundton mit einer Frequenz von 100 Hz und den drei Obertönen mit den Frequenzen 200, 300 und 400 Hz. Die Abtastfrequenz f_s ist, wie in Kapitel 3.1 beschrieben, die vierfache Frequenz des dritten Obertons, also 1600 Hz. Der FIFO dient als Speicher für das Gegensignal und wird als Verzögerung modelliert. Die Größe des Speichers entspricht der Anzahl N der verzögerten Samples und berechnet sich aus der Grundfrequenz f_1 des Störsignals und der Samplefrequenz f_s . Die Periodendauer T_{f_1} beträgt 0,01 s. Die Anzahl der Samples aus der eine Periode besteht, berechnet sich daher aus

$$N = T_{f_1} * f_s = 0.01s * 1600Hz = 16 \quad (3)$$

und entspricht der Anzahl N der zu verzögernden Samples und damit der Größe des FIFOs. Da sich das Störsignal nicht verändert, besteht keine Gefahr für Instabilität im System und der Schrittweitenfaktor kann auf 1 gesetzt werden.

3.3.2 Simulationsergebnisse

Nach der Periodendauer $T_{f_1} = 0,01s$ des Grundtons entspricht das Gegensignal dem invertierten Störsignal. Beide Signale löschen sich nach dieser Zeit vollständig aus und das resultierende Signal ist null (Abb. 5).

Um zu demonstrieren, dass das System nur unter den in Kapitel 3.1 genannten Bedingungen funktioniert, wurde eine Simulation durchgeführt in der dem Störsignal zusätzliches Rauschen überlagert wurde (Abb. 6). Dadurch erfüllt das Störsignal nicht mehr das genannte Kriterium

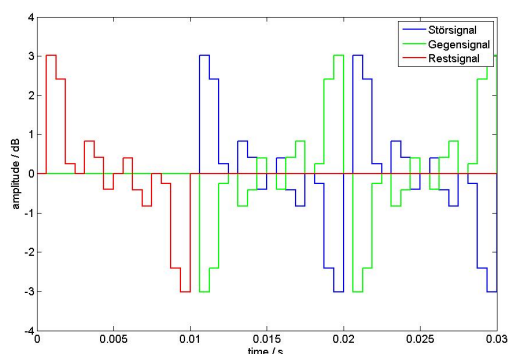


Abb. 5: Simulationsergebnis (Auslöschung des Störsignals durch das Gegensignal)

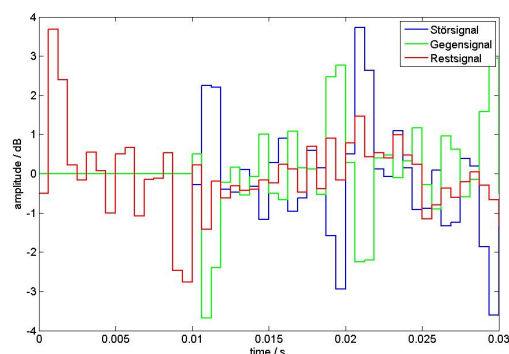


Abb. 6: Simulationsergebnis (Störsignal überlagert mit Rauschen)

des Bestehens aus einem Grundton plus drei Obertönen. Dies führt dazu, dass das FIFO nicht mehr die gewünschte Phasenlage des Gegensignals erzeugen kann. Wie in Bild 6 zu erkennen ist, wird das Störsignal zwar reduziert, kann aber nicht vollständig ausgelöscht werden. Das Restsignal enthält weiterhin ein deutliches Rauschen.

3.4 Nachteile des ANC-Systems mit rückgekoppeltem FIFO

Wie in den vorhergehenden Kapiteln beschrieben, besteht eine direkte Abhängigkeit zwischen der Abtastfrequenz und der Länge des FIFO-Speichers. Es muss immer genau eine Periode des Grundtons in den Speicher passen und die entsprechenden Vielfachen der Obertöne. Daher darf das Störgeräusch nur aus einer Grundfrequenz plus drei Oberfrequenzen bestehen. Sobald das Störsignal andere Anteile enthält, funktioniert das System nicht mehr wie im zweiten Simulationsergebnis (Abb. 6) zu sehen ist.

Durch diese Einschränkungen ist der Frequenzbereich, in dem die korrekte Funktion des Systems gewährleistet ist, sehr begrenzt. Ein solches System findet daher nur sehr wenige praktische Einsatzmöglichkeiten.

4 ANC-System mit adaptivem Filter

In den folgenden Kapiteln wird ein System beschrieben, das mit einem adaptiven Filter arbeitet und als *Adaptive Feedforward System* modelliert wird. Im Gegensatz zu dem in Kapitel 3 beschriebenen System gelten für ein solches System keine speziellen Einschränkungen. Es wird zunächst auf das Prinzip der adaptiven Filterung eingegangen, bevor die Modellierung und Simulation des Systems beschrieben wird.

4.1 Adaptive Filterung

Ein adaptives Filtersystem besteht im wesentlichen aus zwei Komponenten, dem digitalen Filter und dem Adaptionsalgorithmus (Abb. 7).

Bei dem in Bild 7 gezeigten ANC-System handelt es sich um ein *Adaptive Feedforward System*, da es zwei Signale zur Verfügung gestellt bekommt, das Fehlersignal und das Störsignal an der Entstehungsquelle. Es gibt zwei externe Signalquellen, die Nutzsignalquelle und die Störsignalquelle. Diese beiden Signale addieren sich zu dem Primärsignal. Das Ziel des Systems ist, das beim Empfänger ankommende Primärsignal vom Störsignal zu befreien. Das digitale Filter hat dabei die Aufgabe die unbekannte Übertragungstrecke des Störsignals, von seiner Quelle bis zum Empfänger, zu modellieren. Der Adaptionsalgorithmus soll das Filter dahingehend adaptieren, dass das Fehlersignal minimiert wird (Ifeachor und Jervis (2002)).

Als Filter wird in diesem Fall ein FIR-Filter und als Adaptionsalgorithmus der *Least Mean Square* (LMS) Algorithmus eingesetzt. Das FIR-Filter wird verwendet, da es zeitinvariant

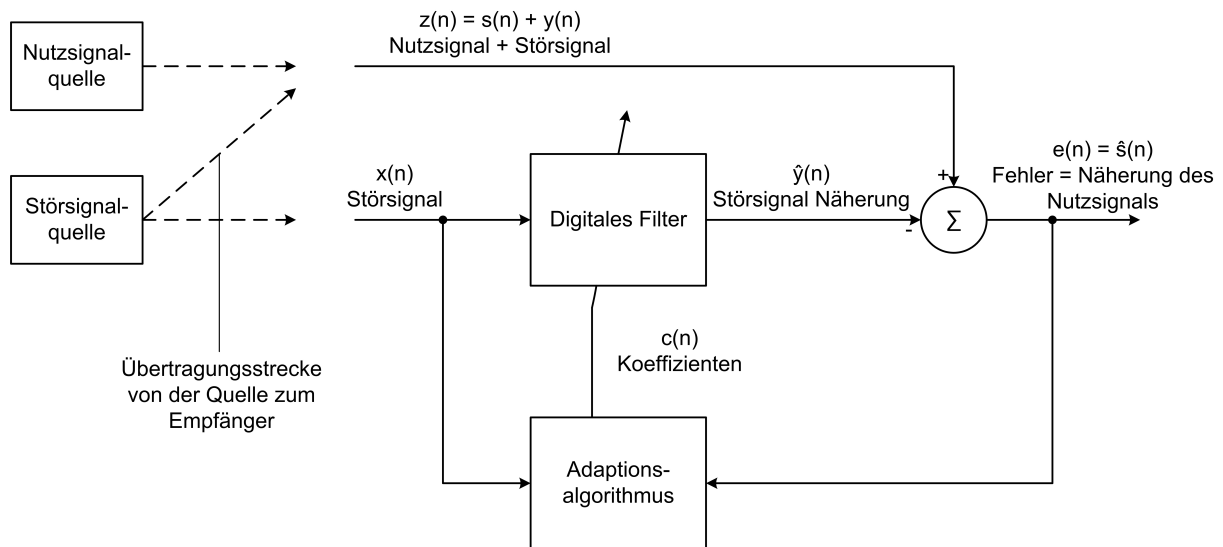


Abb. 7: Adaptives Filter in einem ANC System

arbeitet, das heisst eine endliche Impulsantwort besitzt, und somit keine zusätzliche Rückkopplung im System entsteht, die zu einem instabilen Verhalten führen könnte. Der LMS-Adaptionsalgorithmus wird in der Praxis oft eingesetzt, da er relativ einfach zu implementieren ist und ein gutes Verhältnis zwischen Rechenaufwand und Effizienz besitzt. Außerdem arbeitet er zuverlässig bei unterschiedlichen Betriebsbedingungen (Manolakis u. a. (2000)). In den folgenden Kapiteln wird die mathematische Funktionsweise des Filters und des Adaptionsalgorithmus erläutert.

4.1.1 FIR-Filter

Ein *Finite Impulse Response* Filter berechnet seine Ausgangswerte durch die Faltung der Eingangswerte mit den Filterkoeffizienten. In einem ANC System wird das Gegensignal daher berechnet durch Gleichung 4

$$\hat{y}(n) = \sum_{k=0}^{N-1} c(k)x(n-k) \quad (4)$$

wobei das Gegensignal $\hat{y}(n)$ der Annäherung des Störsignals beim Empfänger entspricht, das Eingangssignal $x(n)$ entspricht dem Störsignal an seiner Quelle und $c(k)$ sind die Koeffizienten des Filters mit der Ordnung N (Ifeachor und Jervis (2002)). In vektorieller Form

$$\hat{y}(n) = \mathbf{c}^T(n)\mathbf{x}(n) \quad (5)$$

ist $\mathbf{c}^T(n)$ der transponierte Filterkoeffizienten-Vektor und $\mathbf{x}(n)$ der Eingangssignal-Vektor (Manolakis u. a. (2000)). Diese Schreibweise wird in den folgenden Gleichungen verwendet, um die Gleichungen übersichtlicher zu gestalten.

4.1.2 LMS-Adaptionsalgorithmus

Der LMS-Adaptionsalgorithmus soll die Koeffizienten des Filters dahingehend adaptieren, dass der Fehler des Systems minimiert wird. Er verfährt dabei nach dem Kriterium des *Least Mean Square Errors*, des kleinsten mittleren quadratischen Fehlers. Der Fehler $e(n)$ zwischen dem Ausgangssignal des Filters $\hat{y}(n)$ und des Primärsignals $z(n)$ berechnet sich durch

$$e(n) = z(n) - \mathbf{c}^T(n)\mathbf{x}(n) \quad (6)$$

Der quadrierte Fehler ergibt sich daher aus

$$e^2(n) = z^2(n) - 2z(n)\mathbf{x}^T(n)\mathbf{c}(n) + \mathbf{c}^T(n)\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^T(n)\mathbf{c}(n) \quad (7)$$

Der mittlere quadratische Fehler ergibt sich aus den Erwartungswerten der einzelnen Terme aus Gleichung 7

$$\begin{aligned}
J &= E[e^2(n)] \\
&= E[z^2(n)] - 2E[z(n)\mathbf{x}^T(n)\mathbf{c}(n)] + E[\mathbf{c}^T(n)\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^T(n)\mathbf{c}(n)] \\
&= \sigma^2 + 2\mathbf{p}^T\mathbf{c}(n) + \mathbf{c}^T(n)\mathbf{R}\mathbf{c}(n)
\end{aligned} \tag{8}$$

wobei $E[\dots]$ den Erwartungswert symbolisiert, σ^2 die Varianz des Primärsignals $z(n)$, \mathbf{p} den Kreuzkorrelationsvektor der Länge N und \mathbf{R} die $N \times N$ Autokorrelationsmatrix (Ifeachor und Jervis (2002)).

Eine grafische Darstellung des MSE in Abhängigkeit der Filterkoeffizienten ergibt die Leistungsoberfläche des Fehlers (Abb. 8). Der Gradient dieser Leistungsoberfläche errechnet sich durch

$$\nabla_n J = \frac{dJ}{d\mathbf{c}(n)} = -2\mathbf{p} + 2\mathbf{R}\mathbf{c}(n) \tag{9}$$

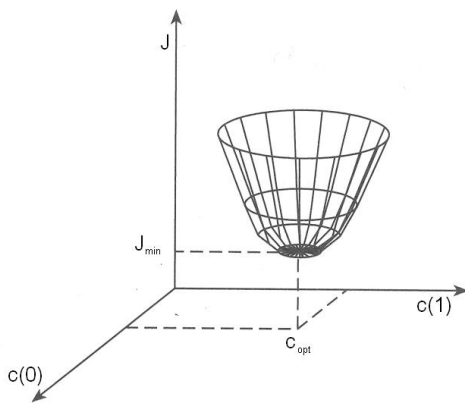


Abb. 8: Fehler Leistungsoberfläche

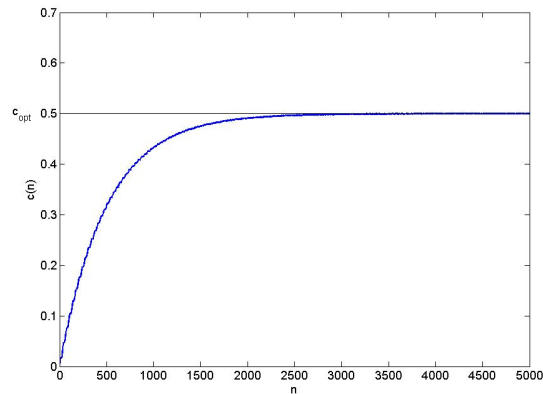


Abb. 9: Annäherung eines Filterkoeffizienten an das Optimum

Hier handelt es sich zur einfacheren Darstellung um ein Filter zweiter Ordnung. Ein Satz Koeffizienten $\mathbf{c}(0)$ und $\mathbf{c}(1)$ entspricht einem Punkt auf der Oberfläche. Am Minimum der Oberfläche ist der Gradient null und die Filterkoeffizienten haben optimale Werte (Abb. 8)

$$\mathbf{c}_{opt}(n) = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{p} \tag{10}$$

Gleichung 10 ist auch bekannt als *Wiener-Hopf* Gleichung. Diese Gleichung hat jedoch Nachteile beim Einsatz in einem praktischen System, denn sie benötigt die Autokorrelationsmatrix \mathbf{R} und den Kreuzkorrelationsvektor \mathbf{p} , die beide nicht von vornherein bekannt sind. Außerdem muss die Matrix invertiert werden, was sehr viel Rechenzeit verlangt. Wenn die Signale zeitvariant sind, ändern sich auch \mathbf{R} und \mathbf{p} mit der Zeit, wodurch $\mathbf{c}_{opt}(n)$ permanent neu berechnet werden müsste (Ifeachor und Jervis (2002)).

Für Echtzeit-Anwendungen werden daher Algorithmen verwendet, die die optimalen Koeffizienten bei jedem Samplingschritt neu berechnen, ohne \mathbf{R} und \mathbf{p} direkt zu berechnen oder eine Matrix-Inversion durchführen zu müssen.

Ein solcher Algorithmus ist der LMS-Adaptionsalgorithmus. Er basiert auf der Methode des steilsten Abstieges, dem *Steepest-Descent-Algorithmus* der die Koeffizienten wie in Gleichung 11 beschrieben adaptiert. Er sucht dabei den Weg des steilsten Abstieges auf der Leistungsoberfläche (Abb. 8).

$$\mathbf{c}(n+1) = \mathbf{c}(n) - \mu \nabla_n J \tag{11}$$

Da zur Berechnung von $\nabla_n J$ jedoch ebenfalls \mathbf{R} und \mathbf{p} bekannt sein müssen, verwendet der LMS-Adaptionsalgorithmus eine Näherung des Gradienten zur Adaption der Filterkoeffizienten (Gleichung 12).

$$\mathbf{c}(n+1) = \mathbf{c}(n) + 2\mu e(n)\mathbf{x}(n) \tag{12}$$

wobei μ wieder die Stabilität reguliert und der Fehler $e(n)$, wie in Gleichung 6 beschrieben,

berechnet wird. Die Koeffizienten werden dadurch dem Optimum angenähert. Diese Näherung verbessert sich mit der Zeit, bis die Koeffizienten sich um das Optimum bewegen (Abb. 9) (Ifeachor und Jervis (2002)).

4.2 Systemmodellierung des adaptiven ANC-Systems

Das System wird in Simulink Version 6.3 modelliert (Abb. 10) und basiert auf den in Kapitel 4.1 beschriebenen Gleichungen. Der LMS-Filter-Block ist dabei der zentrale Teil des Systems,

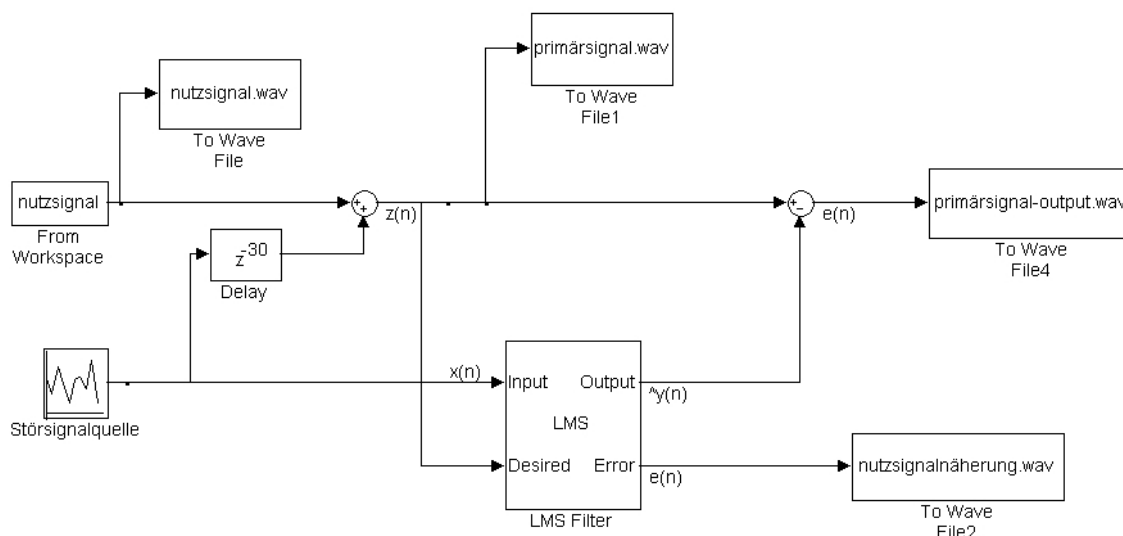


Abb. 10: ANC-System Modell

in den das Störsignal an der Quelle $x(n)$ und das Primärsignal beim Empfänger $z(n)$ eingehen. In diesem Block finden folgende Berechnungen statt:

$$\hat{y}(n) = \mathbf{c}^T(n)\mathbf{x}(n) \quad (13)$$

$$e(n) = z(n) - \hat{y}(n) \quad (14)$$

$$\mathbf{c}(n+1) = \mathbf{c}(n) + 2\mu e(n)\mathbf{x}(n) \quad (15)$$

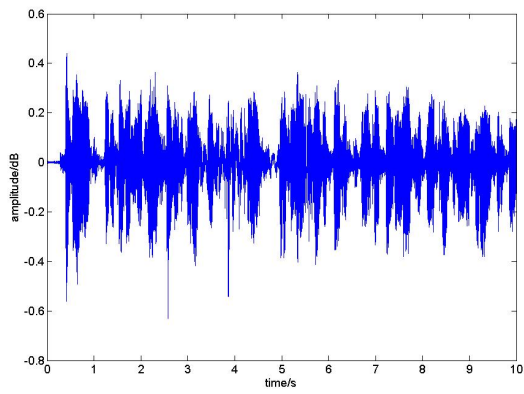
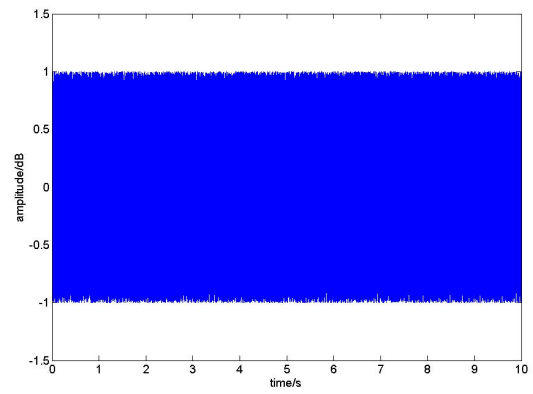
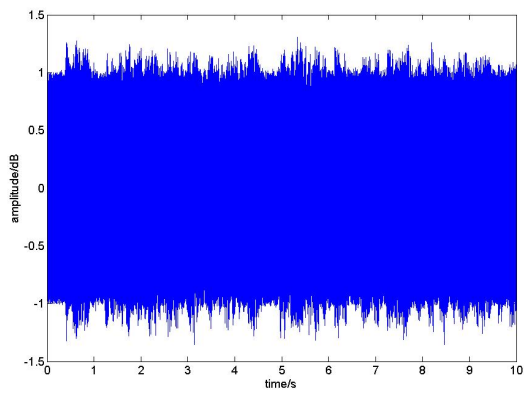
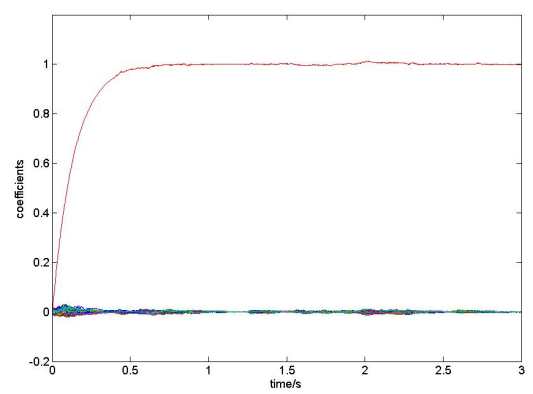
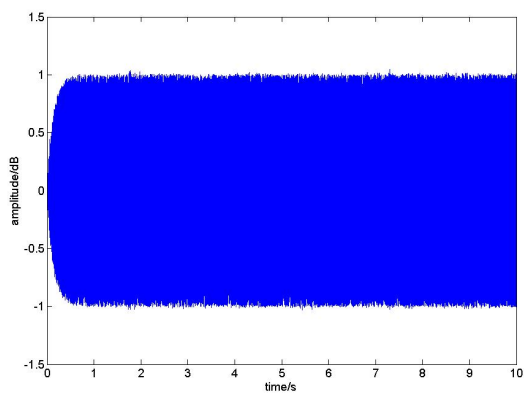
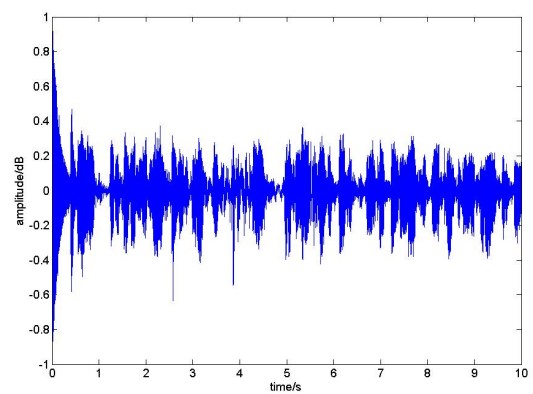
Die Berechnung des Fehlers (Gleichung 14) findet zur Veranschaulichung zusätzlich außerhalb des Blockes statt. Die Übertragungsstrecke des Störsignals von der Quelle zum Empfänger wird durch eine Verzögerung modelliert. Diese Modellierung der Übertragungsstrecke ist einfach gehalten. Durch ein zusätzliches Filter könnte das System-Modell an dieser Stelle präzisiert werden.

4.3 Simulation mit Simulink Version 6.3

4.3.1 Simulationsparameter

Das System wird mit einem Sprachaudiosignal als Nutzsignal und *Random Noise* als Störsignal simuliert. Folgende Daten werden für die Durchführung der Simulation verwendet:

- Abtastfrequenz f_s : 11,025 kHz
- Filterordnung N : 32
- Schrittweite μ : 1/500
- Simulationsdauer t_{sim} : 10 s

Abb. 11: Nutzsinal $s(n)$ Abb. 12: Störsinal $y(n)$ Abb. 13: Primärsinal $z(n)$ Abb. 14: Filterkoeffizienten $c(n)$ Abb. 15: Störsignalnäherung $\hat{y}(n)$ Abb. 16: Nutzsignalnäherung $\hat{s}(n) = e(n)$

4.3.2 Simulationsergebnisse

Die Simulationsergebnisse zeigen, dass durch die Überlagerung von Nutzsignal (Abb. 11) und Störsignal (Abb. 12) das Primärsignal (Abb. 13) stark verrauscht ist. Beim Abspielen des Signals nimmt der Hörer fast ausschließlich Rauschen wahr.

Da die Übertragungstrecke des Störsignals, wie zuvor bereits erwähnt, sehr einfach gehalten wurde, benötigt das Filter nur einen Koeffizienten um die Strecke zu modellieren. Die anderen 31 Koeffizienten bewegen sich um die Nulllinie (Abb. 14). Das Filter hat die Ordnung 32, um die Verzögerung des Störsignals um 30 Samples verarbeiten zu können.

Die Störsignalnäherung (Abb. 15) wird dem eigentlichen Störsignal sehr genau angepasst, wodurch man durch die Subtraktion der Störsignalnäherung vom Primärsignal eine sehr gute Nutzsignalnäherung (Abb. 16) erhält. Beim Abspielen des Signals nimmt der Hörer annähernd das Ausgangsnutzsignal wahr.

4.4 Vorteile des Systems

Die Vorteile dieses adaptiven Systems gegenüber dem einfachen System (Kapitel 3) sind die Unabhängigkeit des Systems vom Störsignal sowie die Fähigkeit des Systems komplexe Signale wie *Random Noise* auslöschen zu können. Das System ist daher ein Ansatzpunkt zur Realisierung des in Kapitel 1.2 genannten Zieles, die Geräusche des FAUST-Fahrzeuges auszulöschen.

5 Einsatzgebiete von ANC-Systemen

Das Prinzip der aktiven Geräuschauslöschung wird heute schon in einigen Anwendungen eingesetzt. Es sind bereits Kopfhörer mit einem integrierten ANC-System im freien Handel erhältlich. Diese werden verwendet um relativ monotone Störgeräusche wie zum Beispiel das Rauschen in einem Flugzeug, oder das Rauschen der Klimaanlage oder von Gerätelüftern am Arbeitsplatz zu eliminieren (Sennheiser (2002), Targus (2006)).

In der Fahrzeugindustrie wird an Systemen geforscht um die Fahr- und Motorgeräusche im Innenraum zu unterdrücken. Honda und Accura bieten bereits Fahrzeugmodelle mit einem solchen System an (Steele (2006), Kurtus (2006)).

Aber auch in der Flugzeugindustrie werden ANC-Systeme entwickelt. Einerseits um das Rauschen in der Flugzeugkabine zu beseitigen, andererseits forscht die NASA an einem Triebwerk, das mit einem ANC-System ausgerüstet wird um die Geräusche des Triebwerkes zu reduzieren (Abb. 17)(NASA (2006)).



Abb. 17: Forschungstriebwerk der NASA

Die Einsatzmöglichkeiten von *Active Noise Cancellation* sind sehr vielfältig. Obwohl die Idee der aktiven Geräuschauslöschung bereits im Jahre 1933 (Kapitel 1.1) entstanden ist, befinden

sich viele Projekte erst im Entwicklungsstadium. Das Thema *Active Noise Cancellation* wird jedoch für viele Firmen und Hersteller aus den oben genannten Bereichen zunehmend interessant, da man erst heute über die notwendigen Ressourcen verfügt um komplexe ANC-Systeme zu realisieren. Dabei sind die Grenzen der möglichen Anwendungen mit Sicherheit noch nicht erreicht.

Literatur

- [Bussmann 2000] BUSSMANN, Axel: *Kreuzkorrelation und Autokorrelation*. 2000. – URL <http://www.we.fh-osnabrueck.de/fbwe/vorlesung/edv2/octave/node30.html>
- [Dahlhaus 2006] DAHLHAUS, Prof. Dr. R.: *Grundvorlesung Statistik*. 2006. – URL <http://www.rzuser.uni-heidelberg.de/~jpeters6/Dateien/EinfStat1-15.pdf>
- [Hashemian u. a. 1993] HASHEMIAN, Reza ; GOLLA, Kumar ; KUO, Sen M. ; JOSHI, Ajit: *Design and Construction of an Active Periodic Noise Cancelling System Using FPGAs*. 1993. – URL <http://ieeexplore.ieee.org/iel2/1096/8013/00343211.pdf>
- [Ifeachor und Jervis 2002] IFEACHOR, Emmanuel C. ; JERVIS, Barrie W.: *Digital Signal Processing - A Practical Approach (Second Edition)*. Pearson Education Limited, 2002. – ISBN 0201-59619-9
- [Kestell und Hansen 1998] KESTELL, Colin D. ; HANSEN, Colin H.: An Overview Of Active Noise Control. In: *Safety Science Monitor* 3 (1998), Februar, Nr. 5, S. 1–7
- [Kuo und Morgan 1999] KUO, Sen M. ; MORGAN, Dennis R.: Active Noise Control: A Tutorial Review. In: *PROCEEDINGS OF THE IEEE* 87 (1999), Juni, Nr. 6, S. 943–973
- [Kurtus 2006] KURTUS, Ron: *XXX Active Noise Cancellation*. 2006. – URL http://www.school-for-champions.com/science/noise_cancellation.htm
- [Manolakis u. a. 2000] MANOLAKIS, Dimitris G. ; INGLE, Vinay K. ; KOGON, Stephen M.: *Statistical and Adaptive Signal Processing: Spectral Estimation, Signal Modeling, Adaptive Filtering and Array Processing*. McGraw Hill Higher Education, 2000. – ISBN 0-07-040051-2
- [Matthies 2005] MATTHIES, Jörn: *Entwicklung von VST-Plugins zum automatischen Entwurf von frequenzgangkorrigierenden FIR-Filtern aus Hörtest-Daten*, Hochschule für Angewandte Wissenschaften Hamburg, Bachelorarbeit, 2005
- [NASA 2006] NASA: *Making Future Commercial Aircraft Quieter*. 2006. – URL <http://www.nasa.gov/centers/glenn/about/fs03grc.html>
- [Sennheiser 2002] SENNHEISER: *Hör-/Sprechgarnituren für die Luftfahrt mit aktiver Lärmkompensation*. 2002. – URL [http://www.sennheiser.com/sennheiser/icm.nsf/resources/Noisegard_dt.pdf/\\$File/Noisegard_dt.pdf](http://www.sennheiser.com/sennheiser/icm.nsf/resources/Noisegard_dt.pdf/$File/Noisegard_dt.pdf)
- [Steele 2006] STEELE, Jeffrey: *Hi-Tech Toys and Gadgets*. 2006. – URL <http://www.latimes.com/extras/newcars/gadgets.html>
- [Targus 2006] TARGUS: *Product Specification Sheet Targus Active Noise Cancellation Headphones*. 2006. – URL http://www.targus.com/pdfviewer/temp/AWM02US_7.pdf

Abbildungsverzeichnis

| | | |
|----|---|----|
| 1 | Auslöschung einer Sinusschwingung | 6 |
| 2 | Adaptive Feedback System | 6 |
| 3 | Adaptive Feedforward System | 7 |
| 4 | Struktur des ANC-Systems mit rückgekoppeltem FIFO | 7 |
| 5 | Simulationsergebnis (Auslöschung des Störsignals durch das Gegensignal) . . . | 9 |
| 6 | Simulationsergebnis (Störsignal überlagert mit Rauschen) | 9 |
| 7 | Adaptives Filter in einem ANC System | 10 |
| 8 | Fehler Leistungsoberfläche | 11 |
| 9 | Annäherung eines Filterkoeffizienten an das Optimum | 11 |
| 10 | ANC-System Modell | 12 |
| 11 | Nutzsignal $s(n)$ | 13 |
| 12 | Störsignal $y(n)$ | 13 |
| 13 | Primärsignal $z(n)$ | 13 |
| 14 | Filterkoeffizienten $c(n)$ | 13 |
| 15 | Störsignalnäherung $\hat{y}(n)$ | 13 |
| 16 | Nutzsignalnäherung $\hat{s}(n) = e(n)$ | 13 |
| 17 | Forschungstriebwerk der NASA | 14 |
| 18 | Folge $\{x_1[n]\} = \{1, 2, 3\}$ | 18 |
| 19 | Folge $\{x_2[n]\} = \{1, 0, 2, -1\}$ | 18 |
| 20 | Faltungsergebnis $\{y[n]\} = \{1, 2, 5, 3, 4, -3\}$ | 19 |
| 21 | Faltung zweier Folgen mit Hilfe einer Tabelle | 19 |

A Das Prinzip der Faltung

Nachfolgend wird das Prinzip der Faltung anhand eines Beispiels mit den Folgen $x_1[n] = 1, 2, 3$ und $x_2[n] = 1, 0, 2, -1$ der Längen $N_1 = 3$ und $N_2 = 4$ veranschaulicht:

$$y[n] = \sum_{m=0}^2 x_1[m] * x_2[n - m] \quad (16)$$

Zwischenrechnung:

$$y[0] = x_1[0] * x_2[0] = 1 * 1 = 1 \quad (17)$$

$$y[1] = x_1[0] * x_2[1] + x_1[1] * x_2[0] = 1 * 0 + 2 * 1 = 2 \quad (18)$$

$$y[2] = x_1[0] * x_2[2] + x_1[1] * x_2[1] + x_1[2] * x_2[0] = 1 * 2 + 2 * 0 + 3 * 1 = 5 \quad (19)$$

$$y[3] = x_1[0] * x_2[3] + x_1[1] * x_2[2] + x_1[2] * x_2[1] = 1 * (-1) + 2 * 2 + 3 * 0 = 3 \quad (20)$$

$$y[4] = x_1[1] * x_2[3] + x_1[2] * x_2[2] = 2 * (-1) + 3 * 2 = 4 \quad (21)$$

$$y[5] = x_1[2] * x_2[3] = 3 * (-1) = -3 \quad (22)$$

Ergebnis:

$$\{y[n]\} = \{1, 2, 5, 3, 4, -3\} \quad (23)$$

Dabei ergibt sich die Länge M des Faltungsproduktes immer aus:

$$M = (N_1 + N_2) - 1 \quad (24)$$

Die Abbildungen 18, 19 und 20 zeigen die graphische Darstellung der Reihen x_1 und x_2 , sowie des Faltungsproduktes.

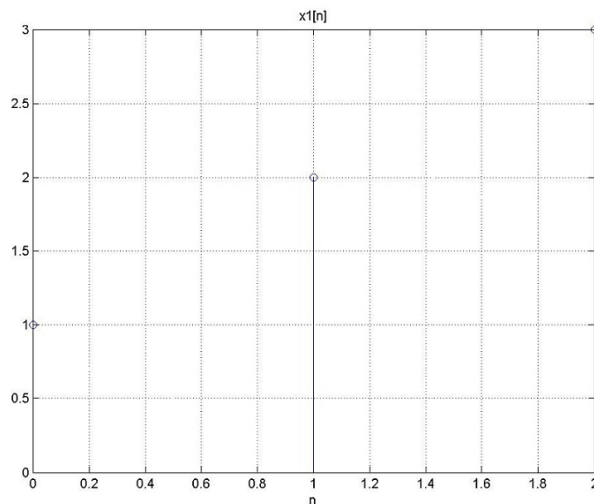


Abb. 18: Folge $\{x_1[n]\} = \{1, 2, 3\}$

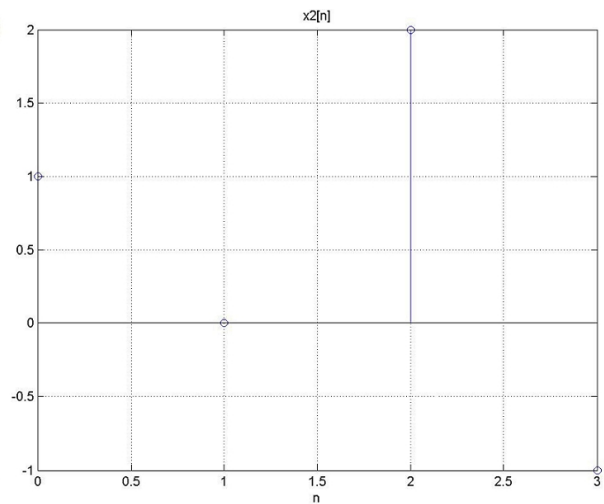


Abb. 19: Folge $\{x_2[n]\} = \{1, 0, 2, -1\}$

Um den Vorgang der Faltung anschaulich nachvollziehen zu können, kann die Faltung auch in einer Tabelle dargestellt werden (Abb. 21). Bei diesem Verfahren errechnet man die Werte für das Faltungsergebnis zeilenweise. Es werden immer die grauen Felder der Folge x_2 , die sich mit den grauen Feldern der Folge x_1 in einer Zeile überschneiden, zunächst multipliziert und dann die Ergebnisse dieser Multiplikationen addiert. Daraus ergibt sich ein Wert des Faltungsergebnisses y . Hierbei kann man erkennen, woher der Begriff Faltung kommt. Einer der beiden Folgen wird gespiegelt, in diesem Fall die Folge $x_1[m]$. Im oberen Diagramm (Abb. 18) würde die Folge um die Ordinate geklappt beziehungsweise gefaltet werden (Matthies (2005)).

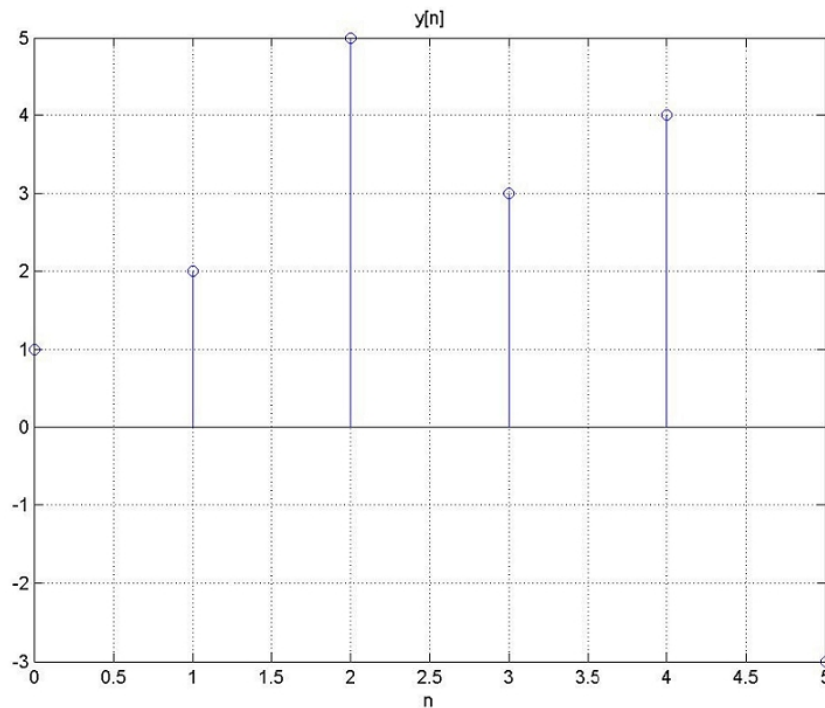


Abb. 20: Faltungsergebnis $\{y[n]\} = \{1, 2, 5, 3, 4, -3\}$

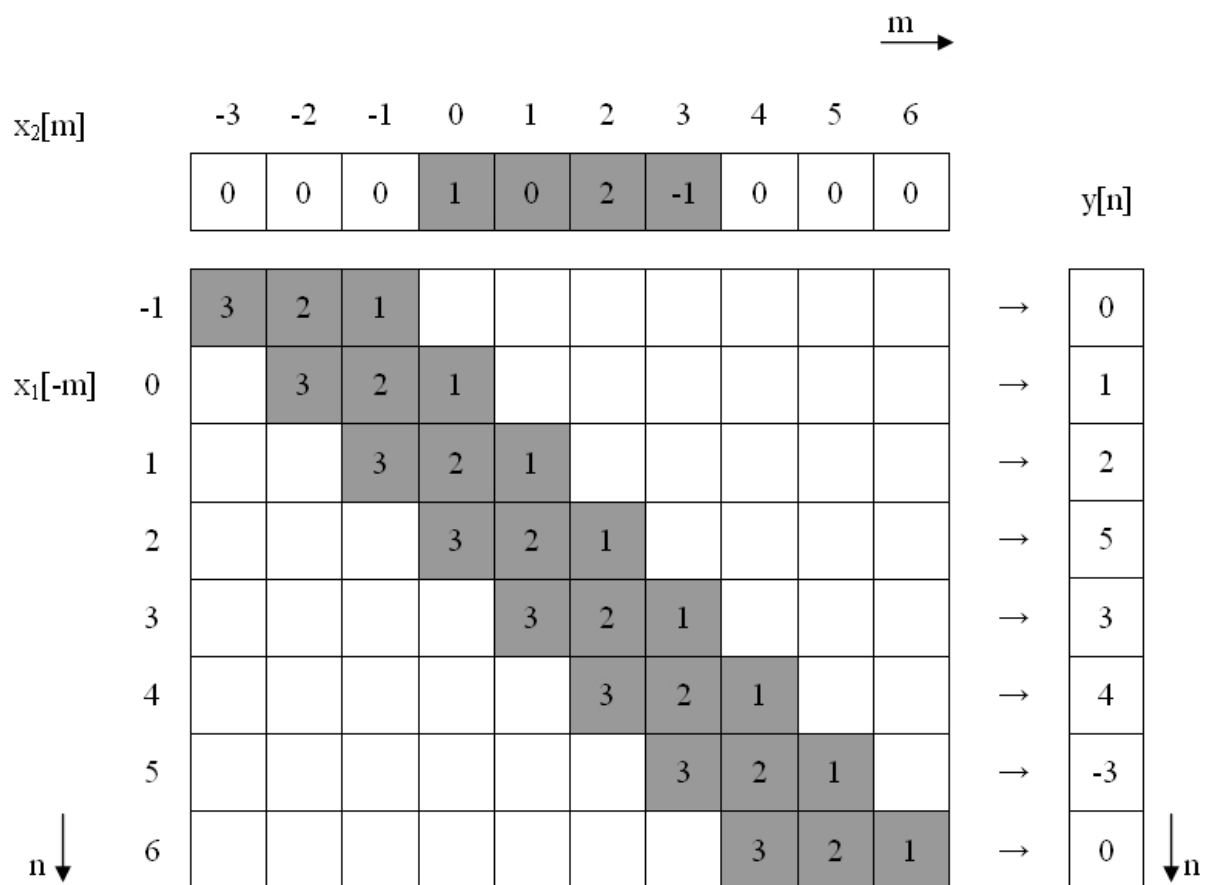


Abb. 21: Faltung zweier Folgen mit Hilfe einer Tabelle

B Erwartungswert und Varianz

Dahlhaus (2006)

7 Erwartungswert und Varianz von Zufallsvariablen

Der Erwartungswert einer Zufallsvariablen wird allgemein als Maßintegral von $g(x) = x$ bzgl. der von X induzierten Verteilung definiert. Da wir den Begriff des Maßintegrals aber noch nicht zur Verfügung haben, verwenden wir zwei getrennte Definitionen für diskrete und stetige ZVAs. Als weitere Kenngröße wird die Varianz definiert. Die Beziehung zwischen Varianz und der Streuung einer ZVA um den Erwartungswert ergibt sich aus der Tschebyscheff-Ungleichung.

Definition 7.1 (Erwartungswert)

(i) Sei X eine diskrete ZVA mit Zähldichte $p(x)$ und Träger $\{x_1, x_2, \dots\}$. Dann heißt

$$\mathbf{E}(X) = \sum_i x_i p(x_i)$$

Erwartungswert von X , falls $\sum |x_i| p(x_i) < \infty$.

(ii) Sei X stetige ZVA mit Wahrscheinlichkeitsdichte $f(x)$. Dann heißt

$$\mathbf{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

Erwartungswert von X , falls $\int |x| f(x) dx < \infty$.

Bemerkung: Man beachte, dass es sich bei dem Erwartungswert im Grunde um den Erwartungswert der von X induzierten Verteilung \mathbf{P}^X handelt (mit Zähldichte $p(x)$ bzw. W'dichte $f(x)$). Im Rahmen der Maßtheorie verwendet man die einheitliche Definition $\mathbf{E}(X) := \int x d\mathbf{P}^X(x) = \int X d\mathbf{P}$. Obige Definitionen sind dann Spezialfälle.

Beispiel 7.2 (Erwarteter Gewinn beim Roulette)

$\Omega = \{0, \dots, 36\}$, \mathbf{P} Laplace-Verteilung, $1 \in$ Einsatz auf "ungerade", X sei der Gewinn.

$$X(\omega) = \begin{cases} 1 & , \text{ falls } \omega \text{ ungerade} \\ -1 & , \text{ falls } \omega \text{ gerade} \end{cases} ;$$

$$\Omega^X = \{-1, 1\};$$

$$p(1) = \mathbf{P}^X(\{1\}) = \frac{18}{37},$$

$$p(-1) = \mathbf{P}^X(\{-1\}) = \frac{19}{37},$$

$$\mathbf{E}X = 1 \cdot \frac{18}{37} + (-1) \cdot \frac{19}{37} = -\frac{1}{37} \approx -0,03.$$

Man verliert also im Mittel 3 Ct pro Spiel. □

Beispiel 7.3

$$X \sim \mathcal{P}(\lambda), \quad p(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda},$$

$$\mathbf{E}X = \sum_{k=0}^{\infty} k p(k) = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \lambda \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda} = \lambda.$$

□

Beispiel 7.4

$$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2), \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2} (x - \mu)^2\right\},$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}X &= \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx \\ &\stackrel{y=x-\mu}{=} \int_{-\infty}^{\infty} y \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2} y^2\right\} dy + \int_{-\infty}^{\infty} \mu \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2} y^2\right\} dy \\ &= 0 + \mu = \mu. \end{aligned}$$

□

Satz 7.5 Für $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und

(i) X diskrete ZVA mit Zähldichte $p(x)$ und Träger $\{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ gilt:

$$\mathbf{E} g(X) = \sum_{i=1}^{\infty} g(x_i) p(x_i), \quad \text{falls } \sum |g(x_i)| p(x_i) < \infty.$$

(ii) X stetige ZVA mit Wahrscheinlichkeitsdichte $f(x)$ [sowie g messbar (MT)] gilt:

$$\mathbf{E} g(X) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x) dx, \quad \text{falls } \int |g(x)| f(x) dx < \infty.$$

Beweis. [in der VL nur Teil (i) vortragen]

(i) Sei $Y := g(X)$, $\mathcal{Y} = \{y_1, y_2, \dots\}$ und $A_i = g^{-1}(\{y_i\})$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} g(X) &= \mathbf{E} Y = \sum_i y_i \mathbf{P}^Y(\{y_i\}) = \sum_i y_i \sum_{x_j \in A_i} p(x_j) \\ &= \sum_i \sum_{x_j \in A_i} y_i p(x_j) = \sum_i \sum_{x_j \in A_i} g(x_j) p(x_j) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} g(x_j) p(x_j). \end{aligned}$$

(ii) Der Beweis im stetigen Fall ist komplizierter (\rightarrow MT). Ist g zusätzlich streng monoton und differenzierbar, so folgt die Aussage mit $Y := g(X)$ aber unmittelbar aus Satz 6.14:

$$\mathbf{E}(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} y f_X(g^{-1}(y)) \left| \frac{d}{dy} g^{-1}(y) \right| dy = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x) dx$$

[Man kann immer von $-\infty$ bis ∞ integrieren, da ggf. $f_Y(y) = 0$ bzw. $f_X(x) = 0$.]

[(MT) Allgemein folgt das Resultat aus der Transformationsformel für Maßintegrale:

$$\mathbf{E}(g(X)) = \int y d\mathbf{P}^{g(X)}(y) = \int g(x) d\mathbf{P}^X(x).] \quad \square$$

Bemerkung: Abgesehen von Spezialfällen gilt $\mathbf{E} g(X) \neq g(\mathbf{E}X)$.

Korollar 7.6 Sei X Zufallsvariable und $a, b \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$\mathbf{E}(aX + b) = a \mathbf{E}X + b.$$

Satz 7.7 Seien X und Y Zufallsvariablen. Dann gilt:

$$\mathbf{E}(X + Y) = \mathbf{E}X + \mathbf{E}Y.$$

Beweis. (für X, Y diskrete ZVA)

Sei

$$\begin{aligned} \{x_1, x_2, \dots\} & \text{ Träger von } X, & A_i & := X^{-1}(\{x_i\}), \\ \{y_1, y_2, \dots\} & \text{ Träger von } Y, & B_j & := Y^{-1}(\{y_j\}). \end{aligned}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(X + Y) &= \sum_{i,j} (x_i + y_j) \mathbf{P}(A_i \cap B_j) \\ &= \sum_i x_i \sum_j \mathbf{P}(A_i \cap B_j) + \sum_j y_j \sum_i \mathbf{P}(A_i \cap B_j) \\ &= \sum_i x_i \mathbf{P}(A_i \cap \Omega) + \sum_j y_j \mathbf{P}(\Omega \cap B_j) \\ &= \mathbf{E}X + \mathbf{E}Y. \end{aligned}$$

□

Beispiel 7.8 Es sollen n Blutproben untersucht werden. p sei die Wahrscheinlichkeit, dass ein Bluttest negativ ausfällt.

1. Methode: Untersuche alle n Proben getrennt.
2. Methode: Teile die Proben in m Gruppen a k Präparate ein ($n = mk$) und mische die Proben innerhalb einer Gruppe.

$$\text{Test} \begin{cases} \text{negativ} & \rightarrow \text{alle } k \text{ Proben negativ} \\ \text{positiv} & \rightarrow \text{untersuche alle } k \text{ Proben getrennt} \end{cases}$$

Sei X_i die Anzahl der Untersuchungen in der i -ten Gruppe.

Gesucht:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\left(\sum_{i=1}^m X_i\right) &= \sum_{i=1}^m \mathbf{E}X_i = \sum_{i=1}^m (1 \cdot p^k + (k+1)(1-p^k)) \\ &= m(k+1 - kp^k) \\ &= n \underbrace{\left(1 + \frac{1}{k} - p^k\right)}_{=: A(k,p)} \stackrel{?}{\lesseqgtr} n. \end{aligned}$$

Man kann $A(k, p)$ nach k minimieren:

z.B. $p = 0.99$, $k \approx 10$, $1 + \frac{1}{k} - p^k \approx 0.2$.

□

Definition 7.9 Sei X eine ZVA mit $\mathbf{E}X^2 < \infty$. Dann heißt

$$\text{Var}(X) = \mathbf{E}[(X - \mathbf{E}(X))^2]$$

die Varianz von X . $\sigma = \sqrt{\text{Var}(X)}$ heißt Standardabweichung von X . Die Varianz ist ein Maß für die "Streuung" der Verteilung um den Erwartungswert.

Satz 7.10 [Sei X ZVA mit $\mathbf{E}X^2 < \infty$ und $a, b \in \mathbb{R}$.] Es gilt

(i) $\text{Var}(X) = \mathbf{E}(X^2) - (\mathbf{E}X)^2$;

(ii) $\text{Var}(aX + b) = a^2 \text{Var}X$.

Beweis.

(i)
$$\begin{aligned} \text{Var}X &= \mathbf{E}(X - \mathbf{E}X)^2 \\ &= \mathbf{E}(X^2 - 2X\mathbf{E}X + (\mathbf{E}X)^2) \\ &= \mathbf{E}X^2 - 2(\mathbf{E}X)^2 + (\mathbf{E}X)^2 = \mathbf{E}X^2 - (\mathbf{E}X)^2. \end{aligned}$$

(ii)
$$\begin{aligned} \text{Var}(aX + b) &= \mathbf{E}\left\{[aX + b - \mathbf{E}(aX + b)]^2\right\} \\ &= \mathbf{E}\{a^2[X - \mathbf{E}X]^2\} \\ &= a^2 \text{Var}(X). \end{aligned}$$

□

Beispiel 7.11 $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ [$\Rightarrow \mathbf{E}X = \mu = 0$].

$$\begin{aligned}
 \text{Var}X &= \mathbf{E}[(X - \underbrace{\mathbf{E}X}_{=0})^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \phi(x) dx \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \exp(-\frac{1}{2}x^2) dx \\
 &\stackrel{\text{partielle Integration}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[-x \exp(-\frac{1}{2}x^2) \right]_{-\infty}^{\infty} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\frac{1}{2}x^2) dx \\
 &= 0 + 1 = 1.
 \end{aligned}$$

Sei nun $Y = aX + b$. Dann gilt

$$(6.14) \Rightarrow Y \sim \mathcal{N}(b, a^2); \quad [\text{lineare Transf. von ZVAs}]$$

$$(7.10) \Rightarrow \text{Var}Y = a^2 \text{Var}X = a^2 \quad \text{und} \quad \mathbf{E}Y = a \mathbf{E}X + b = b;$$

d.h.

| |
|---|
| $ \begin{aligned} &Z \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \\ &\Rightarrow \mathbf{E}Z = \mu, \quad \text{Var}Z = \sigma^2 \end{aligned} $ |
|---|

□

Beispiel 7.12 $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ [$\Rightarrow \mathbf{E}X = \lambda$]

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow \mathbf{E}[X(X-1)] &= \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \\
 &\quad \uparrow \\
 &\quad \text{[Trick]} \\
 &= \lambda^2 \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} e^{-\lambda} = \lambda^2
 \end{aligned}$$

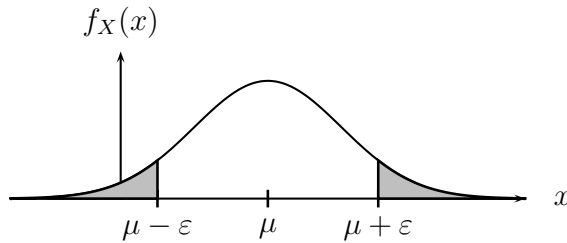
$$\Rightarrow \mathbf{E}X^2 = \mathbf{E}[X(X-1)] + \mathbf{E}X = \lambda^2 + \lambda$$

$$\Rightarrow \text{Var}X = \mathbf{E}X^2 - (\mathbf{E}X)^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda.$$

□

Bemerkung: $\mathbf{E}X^2 \neq (\mathbf{E}X)^2$ [Ausnahme: $X \equiv c$].

Wir wollen nun ausführlich die Frage diskutieren, weshalb $\text{Var}X$ ein Maß für die “Streuung” von X ist. Dafür untersuchen wir den Ausdruck $\mathbf{P}(|X - \mathbf{E}X| \geq \varepsilon)$.



Satz 7.13 (Tschebyscheff-Ungleichung) Sei $\mathbf{E}X^2 < \infty$. Dann gilt für alle $a \in \mathbb{R}$

$$\mathbf{P}(|X - a| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbf{E}(X - a)^2}{\varepsilon^2}.$$

Für $a = \mathbf{E}X$ erhält man $\mathbf{P}(|X - \mathbf{E}X| \geq \varepsilon) \leq \frac{\text{Var}(X)}{\varepsilon^2}$.

Beweis. (für X diskrete ZVA)

Sei $\mathcal{T}(X) = \{x_1, x_2, \dots\}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(|X - a| \geq \varepsilon) &= \sum_{\substack{i=1 \\ |x_i - a| \geq \varepsilon}}^{\infty} \mathbf{P}(X = x_i) \\ &\leq \sum_{\substack{i=1 \\ |x_i - a| \geq \varepsilon}}^{\infty} \frac{(x_i - a)^2}{\varepsilon^2} \mathbf{P}(X = x_i) \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{i=1}^{\infty} (x_i - a)^2 \mathbf{P}(X = x_i) = \frac{1}{\varepsilon^2} \mathbf{E}(X - a)^2. \end{aligned}$$

□

Korollar 7.14

(i) Sei $\mathbf{E}X^2 < \infty$ und $\sigma = \sqrt{\text{Var}X} > 0$. Dann gilt

$$\mathbf{P}(|X - \mathbf{E}X| \geq k\sigma) \leq \frac{1}{k^2};$$

also z.B.

$$\mathbf{P}(|X - \mathbf{E}X| \geq 2\sigma) \leq \frac{1}{4} = 0.25;$$

$$\mathbf{P}(|X - \mathbf{E}X| \geq 3\sigma) \leq \frac{1}{9} \approx 0.11.$$

(ii) Gilt $\text{Var}X = 0$, so folgt $\mathbf{P}(X = \mathbf{E}X) = 1$.

Bemerkung 7.15 Die Tschebyscheff-Ungleichung ist nur eine grobe Abschätzung. Sie gilt für alle ZVAs. Kennt man die Verteilung von X , so kann man die Wahrscheinlichkeit genau ausrechnen. Sei z.B. $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(|X - \mu| < k\sigma) &= \mathbf{P}\left(\left|\frac{X - \mu}{\sigma}\right| < k\right) \\ &= \mathbf{P}\left(-k < \underbrace{\frac{X - \mu}{\sigma}}_{\sim \mathcal{N}(0,1)} \leq k\right) - \underbrace{\mathbf{P}\left(\frac{X - \mu}{\sigma} = k\right)}_{=0} \\ &= \Phi(k) - \Phi(-k) \\ &\stackrel{(*)}{=} 2\Phi(k) - 1. \end{aligned}$$

Damit folgt

$$\mathbf{P}(|X - \mu| \geq k\sigma) = 1 - (2\Phi(k) - 1) = 2 - 2\Phi(k);$$

z.B.

$$\mathbf{P}(|X - \mu| \geq \sigma) \approx 2 - 2 \cdot 0,84 = 0,32;$$

$$\mathbf{P}(|X - \mu| \geq 2\sigma) \approx 2 - 2 \cdot 0,98 = 0,04;$$

$$\mathbf{P}(|X - \mu| \geq 3\sigma) \approx 2 - 2 \cdot 0,9987 = 0,0026.$$

Zu (*): Die Dichte ϕ der $\mathcal{N}(0, 1)$ -Verteilung ist symmetrisch, d.h. $\phi(x) = \phi(-x)$. Damit folgt für die Verteilungsfunktion Φ :

$$\begin{aligned}\Phi(x) &= \int_{-\infty}^x \phi(y) dy = 1 - \int_x^{\infty} \phi(y) dy \\ &= 1 - \int_{-\infty}^{-x} \phi(y) dy \\ &= 1 - \Phi(-x).\end{aligned}$$

□

C Kreuzkorrelation und Autokorrelation

Bussmann (2000)

[Next](#)

[Up](#)

[Previous](#)

[Contents](#)

Next: [Zusammenhang zwischen Korrelation und](#) **Up:** [3 Fourieranalyse](#) **Previous:** [3.4 Komplexe Darstellung der](#)

3.5 Kreuzkorrelation und Autokorrelation

Für 2 Meßreihen bzw. Signalwertfolgen y_k und z_k , $k = 1, \dots, n$ kann die sogenannte Kreuzkorrelation berechnet werden (Korrelation = "Zusammenhang"). Ihre Koeffizienten sind gegeben durch:

$$c_l := \sum_{k=1}^n y_k z_{k+l}$$

Um diese Summe ausführen zu können, muß zusätzlich definiert werden, welche Werte z_k für $k > n$ annimmt. Es erweist sich als sinnvoll, hierbei keine periodische Fortsetzung zu wählen, sondern mit Nullen zu erweitern: $z_k = 0$ für $k = n + 1 \dots 2n$.

c_l ist ein Maß dafür, wie stark im Mittel der Zusammenhang zwischen Wertepaaren y_k, z_{k+l} ist, also zwischen Paaren, die l Einheiten auseinanderliegen.

Für $l=0$ erhält man $c_0 := \sum_{k=1}^n y_k z_k$. Dieser Ausdruck ist direkt verwandt mit der Kovarianz

s_{yz} der beiden Meßreihen :

$$s_{yz} := \frac{(\sum_{k=1}^n y_k z_k) - n y_m z_m}{n - 1} = \frac{c_0 - n y_m z_m}{n - 1}$$

Hier sind y_m und z_m die Mittelwerte der beiden Meßreihen. Die Kovarianz wird zusammen mit den Standardabweichungen s_y und s_z der Meßreihen zur Berechnung des Korrelationskoeffizienten r eingesetzt:

$$r := \frac{s_{yz}}{s_y s_z}$$

Die Kreuzkorrelation kann zum Vergleich von Signalen bzw. Meßreihen eingesetzt werden. Die Beispieldatei yz.dat (Tabelle [9](#)) enthält 2 Meßreihen y_k und z_k , $k = 1, \dots, 8$:

8
 0 0
 1 0
 2 0
 3 1
 4 2
 0 3
 0 4
 0 0

Tabelle 9:
 yz.dat mit 8
 Wertepaaren

Man stellt fest, daß die y -Folge mit der um 2 Einheiten verschobenen z -Folge übereinstimmt. Das am Ende des Abschnitts aufgelistete Programm ```kreuz.m``` (Seite) berechnet gemäß der beschriebenen Summenformel die Kreuzkorrelationskoeffizienten:

Aufrufe:

```
= lies2('yz.dat');
[l, c] = kreuz(y,z);
c
```

Antwort:

```
[l, c]=
0    1.000
1    1.818
2    2.727
3    1.818
4    1.000
5    0.363
6    0.000
7    0.000
```

Es wird deutlich, daß der Koeffizient c_2 den größten Wert hat, was dahingehend interpretiert wird, daß die Ähnlichkeit zwischen der y - und der z -Folge am größten für um 2 Einheiten gegeneinander verschobene Paare y_k, z_{k+2} ist.

Die Korrelation einer Meßreihe $y_l, l = 0, 1, \dots, n - 1$, mit sich selbst wird als Autokorrelation (```auto``` = selbst) bezeichnet:

$$c_l := \sum_{k=1}^n y_k y_{k+l}$$

Werte c_l , die den Zerfall der Korrelationen zwischen Paaren beschreiben, die $l = 0, 1, 2, 3, 4, \dots$ Einheiten auseinanderliegen. Der Wert c_0 ist gleich der Quadratsumme aller y_l , welche direkt mit der Varianz (Quadrat der Standardabweichung der Meßreihe) verwandt ist und eine Aussage über die Streuung der y_l macht:

$$s_y^2 := \frac{(\sum_{k=1}^n y_k^2) - n y_m^2}{n - 1} = \frac{c_0 - n y_m^2}{n - 1}$$

Hier ist y_m der Mittelwert der Meßreihe.

Angegeben werden typischerweise die normierten Werte c_l / c_0 - der besseren Vergleichsmöglichkeiten wegen.

Bei einem sehr unruhigen Signal fallen die c_l sehr schnell mit wachsendem l ab. Im Extremfall eines Zufallsprozesses (``Weisses Rauschen``) gibt es keinerlei Korrelationen zwischen aufeinanderfolgenden Werten y_l und demzufolge sind alle c_l außer c_0 gleich 0.

Das andere Extrem bilden sehr glatte Signale. Hier existieren langreichweitige Korrelationen mit entsprechend langsamem Abfall der Autokorrelationskoeffizienten. Beispielsweise kann das Verhalten der Autokorrelation zur Beurteilung von Profilrauigkeiten herangezogen werden.

Mit Hilfe des am Ende des Abschnitts aufgelisteten Programms auto.m (Seite [10](#)) erzeugen wir die Autokorrelationskoeffizienten gemäß der oben dargestellten Summendefinition.

Aufruf:

```
y=[-1 3 1 2];
[l, c]=auto(y);
[l, c]
```

Antwort:

```
0    1.000
1    0.133
2    0.333
3   -0.133
```

Die Korrelation zerfällt schnell.

Dagegen mit der Meßwertreihe 1,1,1,1:

Aufruf:

```
y=[1 1 1 1];
[l, c]=auto(y);
[l, c]
```

Antwort:

| | |
|---|-------|
| 0 | 1.000 |
| 1 | 0.750 |
| 2 | 0.500 |
| 3 | 0.250 |

Hier nimmt die Autokorrelation deutlich langsamer ab, da zwischen aufeinanderfolgenden Werten ein starker Zusammenhang (sogar Gleichheit) herrscht.

-
- [Zusammenhang zwischen Korrelation und Fouriertransformation](#)
 - [`kreuz.m`](#)
 - [`auto.m`](#) :

[Next](#) [Up](#) [Previous](#) [Contents](#)

Next: [Zusammenhang zwischen Korrelation und](#) **Up:** [3 Fourieranalyse](#) **Previous:** [3.4 Komplexe Darstellung der](#)

Axel Bussmann
Mon Oct 16 11:04:47 CEST 2000

Index

Übertragungsstrecke, [9](#), [12](#)

Adaptionsalgorithmus, [9–11](#)

Adaptive Feedback System, [6](#), [7](#)

Adaptive Feedforward System, [6](#), [9](#)

Aktive Geräuschauslöschung, [5](#)

Autokorrelation, [29](#)

Autokorrelationsmatrix, [11](#)

Erwartungswert, [10](#), [20](#)

Faltung, [10](#), [18](#)

FAUST, [5](#), [14](#)

Fehlermikrofon, [6](#)

FIFO, [7–9](#)

Filterkoeffizienten, [10](#), [11](#)

FIR-Filter, [9](#), [10](#)

Gradient, [11](#)

Kreuzkorrelation, [29](#)

Kreuzkorrelationsvektor, [11](#)

Leistungsoberfläche, [11](#)

LMS-Adaptionsalgorithmus, [10](#)

Methode des steilsten Abstieges, [11](#)

mittlere quadratische Fehler, [10](#)

MSE, [11](#)

Nutzgeräusch, [6](#)

Periodendauer, [8](#)

Phasenverschiebung, [5](#)

Physikalisches Prinzip, [5](#)

Referenzmikrofon, [6](#)

Schrittweitenfaktor, [8](#)

Störgeräuschquelle, [6](#)

Steepest-Descent-Algorithmus, [11](#)

Varianz, [11](#), [20](#)

Wiener-Hopf, [11](#)